Karlsruhe Institute of Technology

Numerische Lösung des Sphalerons $\widehat{S}$ in $SU(3)$ Yang-Mills-Higgs-Theorie

Pascal Nagel | 21.07.2017

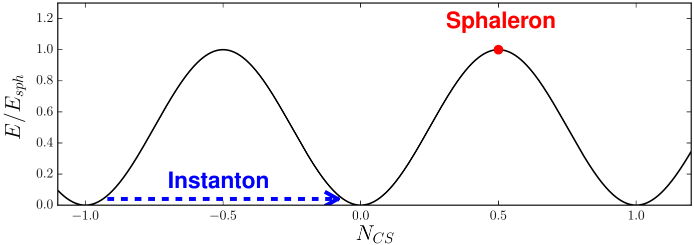
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Standardmodell jenseits von Störungstheorie

- Die Feldgleichungen des Standardmodells haben nicht-perturbative Lösungen
- Diese Lösungen liefern mögliche Erklärungen für beobachtete, nicht-perturbative Phänomene und führen zu Vorhersagen neuer Effekte

Zwei derartige Lösungen sind:

- Das **Instanton I** [Belavin, Polyakov, Schwarz & Tyupkin (1975)] der Quantenchromodynamik (eine $SU(3)$ Yang-Mills-Theorie)
- Das **Sphaleron S** [Klinkhamer & Manton (1984)] des elektroschwachen Standardmodells (eine $SU(2) \times U(1)$ Yang-Mills-Higgs-Theorie)



Sphaleronen und Anomalien

Anomalie: Brechen einer Symmetrie der klassischen Theorie durch Quanteneffekte

- Beispiel: Die Axialvektor-Anomalie

Die (Fermion-)Lagrangedichte der Quantenelektrodynamik:

$$\mathcal{L}_F = \overline{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu)\psi$$

ist invariant unter der Transformation: $\psi \to e^{i\alpha\gamma_5}\psi$

Aus dem Noethertheorem folgt der erhaltene Strom:

$$j^5_\mu = \overline{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi$$

Die Erhaltung dieses Stroms wird jedoch durch Quanteneffekte verletzt!

$$\partial^\mu j^5_\mu = \frac{e^2}{16\pi^2} F^{\mu\nu} F^{\sigma\rho} \epsilon_{\mu\nu\sigma\rho}$$

Sphaleronen und Anomalien

- Manche Anomalien können durch die Wechselwirkung von Fermionen mit einem Sphaleronhintergrundfeld erklärt werden

- Dies führt zu einer wesentlichen Verbindung zwischen Anomalien und Sphaleronen:

Abelsche Axialvektor-Anomalie [Adler, Bell & Jackiw (1969)]	$\Longleftarrow$	**Sphaleron S** [Klinkhamer & Manton (1984)]
Nichtpertubative Anomalie [Witten (1982)]	$\Longleftarrow$	**Sphaleron S^*** [Klinkhamer (1993)]
Nicht-Abelsche Axialvektor-Anomalie [Bardeen (1969)]	$\Longleftarrow$	**Sphaleron $\widehat{S}$** [Klinkhamer & Rupp (2005)]

$SU(3)$ Yang-Mills-Higgs-Theorie

- Das $\widehat{S}$ existiert in $SU(N)$ Yang-Mills-Higgs-Theorien mit $N \geq 3$
- $SU(3)$ Yang-Mills-Higgs-Theorie, mit einem komplexen skalaren Triplett Φ:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\operatorname{tr} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (D_\mu\Phi)^\dagger(D^\mu\Phi) - \lambda\left(\Phi^\dagger\Phi - \frac{v^2}{2}\right)^2,$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + g\,[A_\mu, A_\nu], \quad D_\mu = \partial_\mu + gA_\mu, \quad A_\mu(x) = A_\mu^a(x)T^a, \quad T^a = \lambda^a/(2i).$$

- Wir suchen nach einer statischen Lösung der zugehörigen Feldgleichungen:

$$\left[D_i, F_{ij}\right] = g\left(\Phi^\dagger T^a\,(D_j\Phi) - (D_j\Phi)^\dagger\,T^a\Phi\right)T^a,$$

$$D_iD_i\Phi = 2\lambda\left(\Phi^\dagger\Phi - \frac{v^2}{2}\right)\Phi.$$

Randbedingungen der Feldgleichungen

- Forderung einer Lösung endlicher Energie:

$$A_m(r \to \infty) = -\frac{1}{g} U(x) \left(\partial_m U(x)^{-1} \right), \quad U(x) \in SU(3)$$

$$\Phi(r \to \infty) = \frac{v}{\sqrt{2}} U(x) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Forderung einer regulären Lösung:

$$A_m(r \to 0) = 0, \qquad \Phi(r \to 0) = 0$$

- Entscheidender Schritt: Finden des richtigen $U(x)$
- Hier helfen Einsichten in die Topologie des Konfigurationsraumes der Felder

Ansatz

- Das $\widehat{S}$ ist axialsymmetrisch und invariant unter Reflektion am Äquator
- Der folgende Ansatz [3] löst 16 der 27 Feldgleichungen direkt:

$$
\begin{aligned}
gA_r(r,\theta,\phi) &= 0, \\
gA_\phi(r,\theta,\phi) &= \alpha_1(r,\theta)\cos\theta\, T_\rho + \alpha_2(r,\theta)V_\rho - \alpha_3(r,\theta)\cos\theta\, U_\rho + \alpha_4(r,\theta)\frac{\lambda_3}{2i} + \alpha_5(r,\theta)\frac{\lambda_8}{2i}, \\
gA_\theta(r,\theta,\phi) &= \alpha_6(r,\theta)\; T_\phi + \alpha_7(r,\theta)\cos\theta\; V_\phi - \alpha_8(r,\theta)U_\phi, \\
\Phi(r,\theta,\phi) &= \frac{v}{\sqrt{2}}\left[\beta_1(r,\theta)\lambda_3 + \beta_2(r,\theta)\cos\theta\; 2iT_\rho + \beta_3(r,\theta)\; 2iV_\rho\right]\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

[Wir nutzen hier eine $su(3)$-Basis aus T-,V- und U-Matrizen, sowie den Gell-Mann-Matrizen λ_3, λ_8.]

- Es bleiben 11 partielle Differentialgleichungen in r und θ, welche es zu lösen gilt

Beispielgleichung

- Eine der 11 gekoppelten Differentialgleichungen:

$$
\begin{aligned}
& r^2 \sin\theta \cos\theta \partial_r^2 \alpha_1 + \sin\theta\cos\theta\partial_\theta^2\alpha_1 - \frac{3}{2}\partial_\theta\alpha_1 + \frac{1}{2}\cos 2\theta\ \partial_\theta\alpha_1 - \sin\theta\cos\theta\alpha_1\alpha_6^2 \\
& - \frac{1}{4}\sin\theta\cos^3\theta\alpha_1\alpha_7^2 - \frac{1}{4}\sin\theta\cos\theta\alpha_1\alpha_8^2 - \frac{1}{4}g^2r^2v^2\sin\theta\cos\theta\alpha_1\beta_1^2 \\
& - \frac{1}{4}g^2r^2v^2\sin\theta\cos^3\theta\alpha_1\beta_2^2 - \sin\theta\partial_\theta\alpha_2\alpha_8 - \frac{3}{4}\sin\theta\cos\theta\alpha_2\alpha_6\alpha_7 - \frac{1}{2}\sin\theta\alpha_2\partial_\theta\alpha_8 \\
& + \frac{1}{2}\cos\theta\alpha_2\alpha_8 - \frac{1}{4}g^2r^2v^2\sin\theta\cos\theta\alpha_2\beta_2\beta_3 - \sin\theta\cos^2\theta\partial_\theta\alpha_3\alpha_7 + \frac{3}{4}\sin\theta\cos\theta\alpha_3\alpha_6\alpha_8 \\
& - \frac{1}{2}\sin\theta\cos^2\theta\alpha_3\partial_\theta\alpha_7 + \cos\theta\alpha_3\alpha_7 - \frac{1}{2}\cos 2\theta\ \cos\theta\alpha_3\alpha_7 - \frac{1}{4}g^2r^2v^2\sin\theta\cos\theta\alpha_3\beta_1\beta_3 \\
& + 2\sin\theta\partial_\theta\alpha_4\alpha_6 + \sin\theta\alpha_4\partial_\theta\alpha_6 - \cos\theta\alpha_4\alpha_6 - \frac{1}{2}\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta\alpha_5\alpha_7\alpha_8 \\
& - \frac{g^2r^2v^2\sin\theta\cos\theta\alpha_5\beta_1\beta_2}{2\sqrt{3}} + \sin\theta\partial_\theta\alpha_6 - \cos\theta\alpha_6 + \frac{3}{2}\sin\theta\cos\theta\alpha_7\alpha_8 \\
& + \frac{1}{2}g^2r^2v^2\sin\theta\cos\theta\beta_1\beta_2 = 0
\end{aligned}
$$

Numerische Lösung

- Die reduzierten Feldgleichungen können nur an den Rändern analytisch gelöst werden

Wir nutzen 2 verschiedene Methoden um die volle Lösung anzunähern:

- Explizites Lösen der reduzierten Feldgleichungen
- Minimierung der statischen Wirkung
  (Extremum der Wirkung löst die Feldgleichungen)

- Beide Methoden liefern ähnliche Feldkonfigurationen und Energien

Einige Ansatzfunktionen der $\widehat{S}$-Lösung

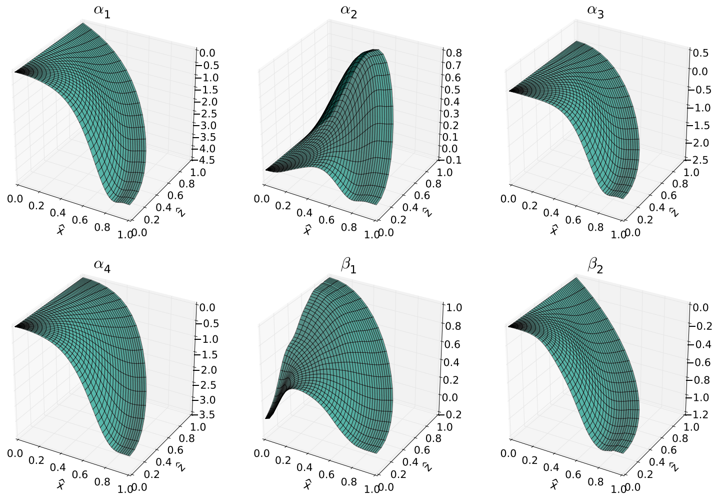


Abb.: Auszug der $\widehat{S}$-Ansatzfunktionen [$\widehat{x} = \frac{gvr}{1+gvr} \sin\theta$, $\widehat{z} = \frac{gvr}{1+gvr} \cos\theta$]

Energiedichte und Energie des $\widehat{S}$

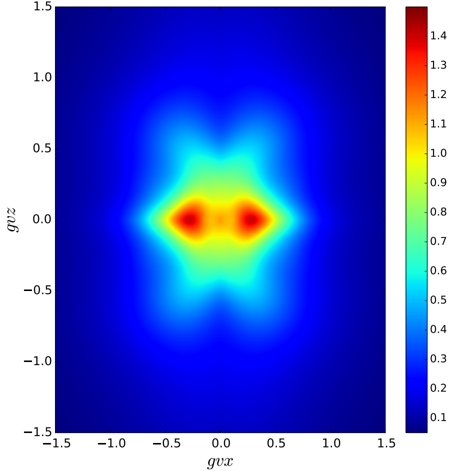


Abb.: Energiedichte der $\widehat{S}$-Lösung, beliebig skaliert. Rotationssymmetrie um die z-Achse.

- $\widehat{S}$-Energie mit einem skalaren Triplett und $\lambda/g^2 = 0$:

$$E_{\widehat{S}} \approx (1.35 \pm 0.03) \left[\frac{4\pi v}{g}\right]$$

- $\widehat{S}$-Energie mit 3 skalaren Tripletts und $\lambda/g^2 = 1$:

$$E_{\widehat{S}} \approx (6.01 \pm 0.02) \left[\frac{4\pi v}{g}\right]$$

Zusammenfassung

Karlsruhe Institute of Technology

- Es wurde zum ersten Mal eine wohldefinierte Lösung des Sphalerons $\widehat{S}$ bestimmt
- Diese Lösung trägt zur Vervollständigung eines konsistenten Bildes von Anomalien bei
- Die niedrige Energie des $\widehat{S}$ deutet darauf hin, dass die zugehörigen Prozesse kaum unterdrückt sind
- Die Energiebarriere des $\widehat{S}$ mit einem skalaren Triplett hat eine unerwartete Struktur. Ist das $\widehat{S}$ möglicherweise meta-stabil?
- Trägt das Sphaleron $\widehat{S}$ zur nicht-perturbativen Dynamik des Standardmodells bei?

Literatur

[1] A.A. Belavin, A.M. Polyakov, A.S. Schwartz and Y.S. Tyupkin, *Pseudoparticle solutions of the Yang-Mills equations*, Phys. Lett. B 59 (1975) 85.

[2] F.R. Klinkhamer and N.S. Manton, *A saddle point solution in the Weinberg-Salam theory*, Phys. Rev. D 30 (1984) 2212.

[3] F.R. Klinkhamer and C. Rupp, *A sphaleron for the non-Abelian anomaly*, Nucl. Phys. B709 (2005) 171 [arXiv:hep-th/0410195].

[4] W.A. Bardeen, *Anomalous Ward identities in spinor field theories*, Phys. Rev. 184 (1969) 1848.

[5] S.L. Adler, *Axial-vector vertex in spinor electrodynamics*, Phys. Rev. 177 (1969) 2426.

[6] J.S. Bell and R. Jackiw, *A PCAC puzzle: $\pi_0 \to \gamma\gamma$ in the σ-model*, Il Nuovo Cimento A 60 (1969) 47.

[7] E. Witten, *An $SU(2)$ anomaly*, Phys. Lett. B 117 (1982) 324.

Backup

- $\widehat{S}$-Abbildung:

$$U(\theta,\phi) = \begin{pmatrix} \cos^2\theta & -\cos\theta\sin\theta\; e^{i\phi} & \sin\theta\; e^{-i\phi} \\ -\cos\theta\sin\theta\; e^{i\phi} & \sin^2\theta\; e^{2i\phi} & \cos\theta \\ -\sin\theta\; e^{-i\phi} & -\cos\theta & 0 \end{pmatrix}$$

- $su(3)$-Basis:

$$T_\phi = \sin\phi\frac{\lambda_1}{2i} + \cos\phi\frac{\lambda_2}{2i} \qquad T_\rho = \cos\phi\frac{\lambda_1}{2i} - \sin\phi\frac{\lambda_2}{2i}$$

$$V_\phi = -\sin\phi\frac{\lambda_4}{2i} + \cos\phi\frac{\lambda_5}{2i} \qquad V_\rho = \cos\phi\frac{\lambda_4}{2i} + \sin\phi\frac{\lambda_5}{2i}$$

$$U_\phi = -\sin(2\phi)\frac{\lambda_6}{2i} + \cos(2\phi)\frac{\lambda_7}{2i} \qquad U_\rho = \cos(2\phi)\frac{\lambda_6}{2i} + \sin(2\phi)\frac{\lambda_7}{2i}$$