

# Partonische Wirkungsquerschnitte an Collidern

Pascal Nagel

2.12.2011

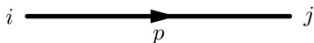
# 1 Feynman Regeln der QCD

- 1 Feynman Regeln der QCD
- 2 Beispiel: Top-Paar Produktion

- 1 Feynman Regeln der QCD
- 2 Beispiel: Top-Paar Produktion
- 3 Hadron-Hadron-Streuung

- 1 Feynman Regeln der QCD
- 2 Beispiel: Top-Paar Produktion
- 3 Hadron-Hadron-Streuung
- 4 Monte-Carlo

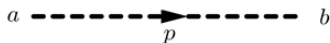
# Feynman Regeln der QCD (Propagatoren)



$$i\delta_{ij} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$



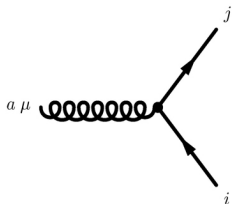
$$\frac{-i\delta_{ab}}{k^2 + i\epsilon} \left[ g_{\mu\nu} - (1 - \eta) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right]$$



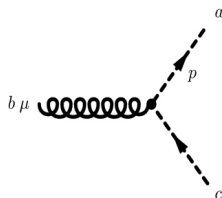
$$\frac{-i\delta_{ab}}{p^2 + i\epsilon}$$

$\eta$  fixiert die Eichung:  $\eta = \begin{cases} 1 & \text{Feynman Eichung} \\ 0 & \text{Landau Eichung} \end{cases}$

# Feynman Regeln der QCD (Vertices)

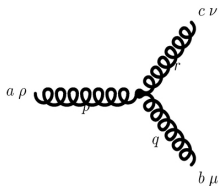


$$ig_s \gamma_\mu T_{ji}^a$$

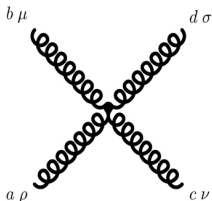


$$g_s f^{abc} p_\mu$$

# Feynman Regeln der QCD (Vertices)



$$-g_s f^{abc} [(p-q)_\nu g_{\rho\mu} + (q-r)_\rho g_{\mu\nu} + (r-p)_\mu g_{\nu\rho}]$$



$$\begin{aligned} & -ig_s^2 f^{abe} f^{cde} (g_{\rho\nu} g_{\mu\sigma} - g_{\rho\sigma} g_{\mu\nu}) \\ & -ig_s^2 f^{ace} f^{bde} (g_{\rho\mu} g_{\nu\sigma} - g_{\rho\sigma} g_{\mu\nu}) \\ & -ig_s^2 f^{ade} f^{cbe} (g_{\rho\nu} g_{\mu\sigma} - g_{\rho\mu} g_{\nu\sigma}) \end{aligned}$$



# Top-Paar Produktion

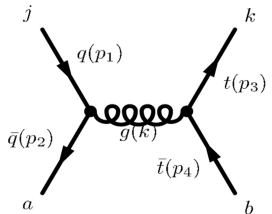
## Quarkannihilation

$$q(p_1) + \bar{q}(p_2) \rightarrow t(p_3) + \bar{t}(p_4)$$

$$iM = \bar{v}(p_2) ig\gamma^\mu T_{ji}^a u(p_1) \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2} \bar{u}(p_3) ig\gamma^\nu T_{ik}^b v(p_4)$$

$$M = \frac{g^2}{k^2} (T^a T^b)_{jk} \bar{v}(p_2) \gamma^\mu u(p_1) \bar{u}(p_3) \gamma_\mu v(p_4)$$

$$|M|^2 = \frac{g^4}{k^4} \left| T^a T^b \right|^2 \bar{v}(p_2) \gamma^\mu u(p_1) \bar{u}(p_3) \gamma_\mu v(p_4) \bar{v}(p_4) \gamma^\nu u(p_3) \bar{u}(p_1) \gamma_\nu v(p_2)$$



# Quarkannihilation

$$\sum_{\text{Farbe, Spin}} \bar{M}^2 = \frac{1}{d_F(N^2 - 1)} \sum_{a,b,j,k} \left| (T^a T^b)_{jk} \right|^2$$

$$\times \sum_{\text{Spin}} \bar{v}(p_2) \gamma^\mu u(p_1) \bar{u}(p_3) \gamma_\mu v(p_4) \bar{v}(p_4) \gamma^\nu u(p_3) \bar{u}(p_1) \gamma_\nu v(p_2)$$

# Quarkannihilation

## Farbsumme

$$\begin{aligned}\sum_{a,b,j,k} \left| (T^a T^b)_{jk} \right|^2 &= \sum_{a,b,j,k} (T^a T^b)_{jk} (T^a T^b)_{jk}^* \\ &= \sum_{a,b,j,k} (T^a T^b)_{jk} (T^b T^a)_{kj} \\ &= \text{Tr} \left[ T^a T^b T^b T^a \right] \\ &= N \cdot C_F^2 \\ &= N \left( \frac{N^2 - 1}{2N} \right)^2 = \frac{16}{3}\end{aligned}$$

# Quarkannihilation

## Spinsumme

$$\begin{aligned}
 & \sum_{Spin} \bar{v}(p_2) \gamma^\mu u(p_1) \bar{u}(p_3) \gamma_\mu v(p_4) \bar{v}(p_4) \gamma^\nu u(p_3) \bar{u}(p_1) \gamma_\nu v(p_2) \\
 &= \frac{1}{4} \sum_{\lambda} \bar{v}_i(p_2) \gamma_{ij}^\mu u_j(p_1) \bar{u}_a(p_3) \gamma_{\mu ab} \not{p}_{4bc} \gamma_{cd}^\nu u_d(p_3) \bar{u}_k(p_1) \gamma_{\nu kl} v_l(p_2) \\
 &= \frac{1}{4} Tr \left[ \not{p}_2 \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu \right] \cdot Tr \left[ \not{p}_3 \gamma_\mu \not{p}_4 \gamma_\nu \right] \\
 &= 8 [(p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3) + (p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_4)] \\
 &= 2k^4 \frac{t^2 + u^2}{s^2}
 \end{aligned}$$

# Quarkannihilation

$$\begin{aligned}\sum_{\text{Farbe, Spin}} |M|^2 &= g^4 \frac{1}{24} \frac{16}{3} 2 \frac{t^2 + u^2}{s^2} \\ &= \frac{4g^4}{9} \frac{t^2 + u^2}{s^2}\end{aligned}$$

# Quarkannihilation

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{s}}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{s}}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{s}}{2} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{s}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ k\sin\theta \\ 0 \\ k\cos\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k \\ -k\sin\theta \\ 0 \\ -k\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$k = \frac{\sqrt{s}}{2}$$

$$\Rightarrow t = -\frac{s}{2}(1 - \cos\theta)$$

$$\Rightarrow u = \frac{s}{2}(1 + \cos\theta)$$

$$\sum_{\text{Farbe, Spin}} |M|^2 = \frac{2g^4}{9}(1 + \cos^2\theta)$$

# Quarkannihilation

## Phasenraumintegral

$$dLIPS_{(2 \rightarrow N)} = \delta \left( p_1 + p_2 - \sum_{j=3}^{N+2} p_j \right) \prod_{i=3}^{N+2} \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_i}$$

$$\begin{aligned} dLIPS &= \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3 2E_3} \frac{d^3 p_4}{(2\pi)^3 2E_4} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \\ &= \frac{|\vec{p}_3|^2 d|\vec{p}_3| d\Omega}{(2\pi)^2 4E_3 E_4} \delta(2E_1 - 2E_3) \\ &= \frac{E_3 dE_3}{(2\pi)^2 4E_4} 2\pi d\cos\theta \frac{1}{2} \delta(E_1 - E_3) = \frac{1}{16\pi} d\cos\theta \end{aligned}$$

# Quarkannihilation

## Flussfaktor

$$\frac{1}{4\sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} = \frac{1}{4(p_1 p_2)} = \frac{1}{2s}$$

## Gesamt

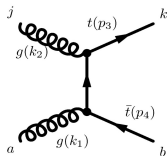
$$\begin{aligned}\frac{d\sigma(q\bar{q} \rightarrow t\bar{t})}{d\cos\theta} &= \frac{1}{2s} \frac{1}{16\pi} \frac{2g^4}{9} (1 + \cos^2\theta) \\ &= \frac{\alpha_s^2 \pi}{36} \frac{1}{s} (1 + \cos^2\theta)\end{aligned}$$



# Top-Paar Produktion

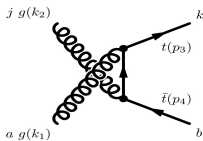
## Gluonfusion

$$g(k_1) + g(k_2) \rightarrow t(p_3) + \bar{t}(p_4)$$



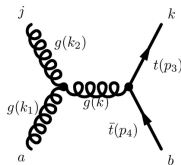
$M_1$

+



$M_2$

+



$M_3$

$$M = \sum_i M_i = \epsilon_\mu(k_2)\epsilon_\nu(k_1) \sum_i M_i^{\mu\nu}$$

# Gluonfusion

$$iM_1^{\mu\nu} = \bar{u}(p_3) ig\gamma^\mu T_{ki}^j \frac{i}{\not{k}_1 - \not{p}_4} ig\gamma^\nu T_{ib}^a v(p_1)$$

$$M_1^{\mu\nu} = \frac{g^2}{p_4^2 - k_1^2} (T^j T^a)_{kb} \bar{u}(p_3) \gamma^\mu (\not{p}_4 + \not{k}_1) \gamma^\nu v(p_1)$$

$$iM_2^{\mu\nu} = \bar{u}(p_3) ig\gamma^\mu T_{ki}^a \frac{i}{\not{k}_2 - \not{p}_4} ig\gamma^\nu T_{ib}^j v(p_1)$$

$$M_2^{\mu\nu} = \frac{g^2}{p_4^2 - k_2^2} (T^a T^j)_{kb} \bar{u}(p_3) \gamma^\mu (\not{p}_4 + \not{k}_2) \gamma^\nu v(p_1)$$

# Gluonfusion

$$\begin{aligned}
 iM_3^{\mu\nu} &= -gf^{iaj} [(k + k_1)^\mu g^{\rho\nu} + (k_2 - k_1)^\rho g^{\nu\mu} - (k_2 + k)^\nu g^{\mu\rho}] \\
 &\times \frac{-i}{k^2} (-g_{\rho\sigma} + \Gamma_{\rho\sigma}) \bar{u}(p_3) ig\gamma^\sigma T_{kb}^i v(p_1)
 \end{aligned}$$

$\Gamma_{\rho\sigma}$  ist von der Eichung abhängig.

$$\begin{aligned}
 M_3^{\mu\nu} &= \frac{g^2}{k^2} [T^a, T^j]_{kb} [(k + k_1)^\mu g^{\rho\nu} + (k_2 - k_1)^\rho g^{\nu\mu} - (k_2 + k)^\nu g^{\mu\rho}] \\
 &\times (-g_{\rho\sigma} + \Gamma_{\rho\sigma}) \bar{u}(p_3) \gamma^\sigma v(p_1)
 \end{aligned}$$

# Gluefusion

$$\sum_{\text{Farbe, Spin}} |M|^2 = \sum_{\text{Farbe, Spin}} |M_1 + M_2 + M_3|^2$$

## Farbsumme

Alle Kombinationsmöglichkeiten können auf 2 vereinfacht werden:

$$(T^a T^b)_{jk} (T^a T^b)_{jk}^* = N \cdot C_F^2 = N \left( \frac{N^2 - 1}{2N} \right)^2 = \frac{16}{3}$$

$$\begin{aligned} (T^a T^b)_{jk} (T^b T^a)_{jk}^* &= N \cdot C_F \left( C_F - \frac{1}{2} C_A \right) \\ &= N \left( \frac{N^2 - 1}{2N} \right) \left( \frac{N^2 - 1}{2N} - \frac{N}{2} \right) = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

# Gluonfusion

Der explizite Rechenweg zur Berechnung der Polarisations-/Spinsumme ist abhängig von der Wahl der Eichung. Je nach Eichung müssen evtl. noch Geistwirkungsquerschnitte subtrahiert werden.

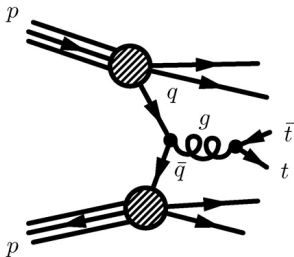
## Ergebnis

$$\frac{\sigma_{(gg \rightarrow t\bar{t})}}{dt} = \frac{\alpha_s^2 \pi}{6s^2} \left[ \frac{u}{t} + \frac{t}{u} - \frac{9}{4} \frac{t^2 + u^2}{s^2} \right]$$

# Hadron-Hadron WQ

## Beispiel

### Quarkannihilation in pp-Streuung



$$\sigma_{(p(P_1)+p(P_2)\rightarrow Y+X)} = \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \sum_f f_f(x_1) f_{\bar{f}}(x_2) \cdot \sigma_{(q_f(x_1 P) \bar{q}_{\bar{f}}(x_2 P) \rightarrow Y)}$$

# Parton Distribution Functions

## Longitudinale Impulsverteilung innerhalb des Protons

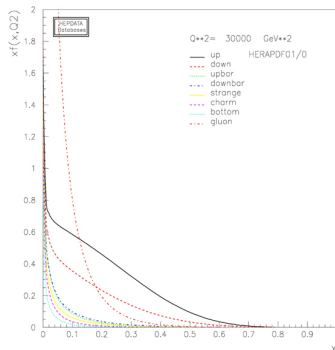
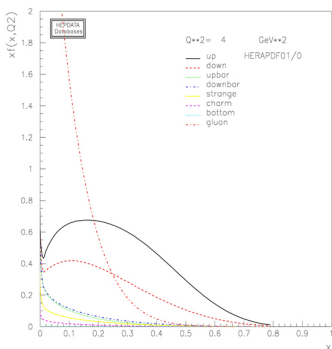


Abbildung: HERAPDF01:  $Q = 2 \text{ GeV}$  (links),  $Q = 173 \text{ GeV}$  (rechts)

## Wahl von geeigneten Parametern

Im Allgemeinen ist nun das Schwerpunktsystem der Partonenstreuung (\*) zum Laborsystem geboostet.

⇒ Rapiditäten der Teilchen im Endzustand  $\mathbf{y}_3$ ,  $\mathbf{y}_4$  und deren Transversalimpuls  $\mathbf{p}_\perp$ , anstatt  $\theta$ ,  $x_1$  und  $x_2$

Verwende:

$$E_i = p_\perp \cosh(y_i) \quad p_{i\parallel} = p_\perp \sinh(y_i)$$



## Wahl von geeigneten Parametern

Rapidityen  $y_i$  beschreiben longitudinale boosts.

$$p_{3\parallel*} = \frac{\sqrt{s}}{2} \cos\theta_* \quad p_{3\perp*} = \frac{\sqrt{s}}{2} \sin\theta_*$$

$$y_{3*} = -y_{4*} = y_* = \frac{1}{2}(y_3 - y_4)$$
$$Y = \frac{1}{2}(y_3 + y_4)$$

$$\cosh y_* = \frac{1}{\sin\theta_*}$$

# Variablentransformation

$$s = \frac{4p_{\perp}^2}{\sin^2\theta_*} = 4p_{\perp}^2 \cosh^2 y_* = 4p_{\perp}^2 \cosh^2 \left( \frac{1}{2}(y_3 - y_4) \right)$$

$$t = -\frac{s}{2}(1 - \cos\theta_*) = -2p_{\perp}^2 \cosh y_* e^{-y_*}$$

$$= -2p_{\perp}^2 \cosh \left( \frac{1}{2}(y_3 - y_4) \right) e^{-\frac{1}{2}(y_3 - y_4)}$$

$$x_1 = \frac{2p_{\perp}}{\sqrt{s'}} \cosh y_* e^Y = \frac{2p_{\perp}}{\sqrt{s'}} \cosh \left( \frac{1}{2}(y_3 - y_4) \right) e^{\frac{1}{2}(y_3 + y_4)}$$

$$x_2 = \frac{2p_{\perp}}{\sqrt{s'}} \cosh y_* e^{-Y} = \frac{2p_{\perp}}{\sqrt{s'}} \cosh \left( \frac{1}{2}(y_3 - y_4) \right) e^{-\frac{1}{2}(y_3 + y_4)}$$

# Variablentransformation

Jacobi Determinante

$$\frac{\partial(x_1, x_2, t)}{\partial(y_3, y_4, p_\perp)} = \frac{8p_\perp^3}{s'} \cosh^2 y_* = \frac{2p_\perp s}{s'}$$

Mit  $s = x_1 x_2 s'$  und  $p_\perp dp_\perp = \frac{1}{2\pi} d^2 p_\perp$ :

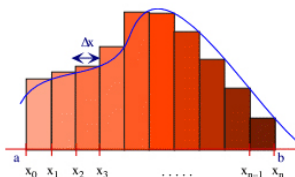
$$\frac{d^4 \sigma}{dy_3 dy_4 d^2 p_\perp} = x_1 f_1(x_1) x_2 f_2(x_2) \frac{1}{\pi} \frac{d\sigma}{dt} (1 + 2 \rightarrow 3 + 4)$$

# Beispiel: $q\bar{q} \rightarrow t\bar{t}$

$$\frac{d^4\sigma_{(pp \rightarrow t\bar{t})}}{dy_3 dy_4 d^2p_\perp} = \frac{\alpha_s^2 \pi}{9} x_1 f_1(x_1) x_2 f_2(x_2) \frac{1 + 2e^{2(y_3 - y_4)} - 2e^{y_3 - y_4}}{16p_\perp^4 \cosh^4\left(\frac{1}{2}(y_3 - y_4)\right)}$$

# Monte-Carlo

## Erinnerung an gewöhnliche numerische Integration



Mit  $\Delta x = \frac{b-a}{N}$  und  $x_i = a + (i - \frac{1}{2}) \Delta x$  um den Funktionswert aus der Mitte jedes Intervalls zu entnehmen:

$$A = \sum_{i=1}^N f(x_i) \Delta x = \frac{b-a}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i)$$

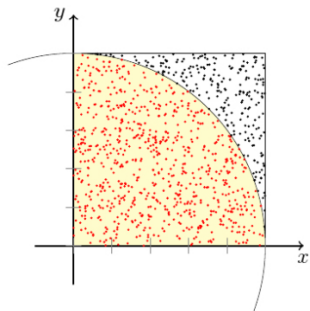
## Gewöhnliche numerische Integration

In  $M$  Dimensionen (Intervalle  $([a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_M, b_M])$ ) ergibt sich ein  $(M+1)$ -dimensionales Volumen:

$$\begin{aligned}
 V^{(M+1)} &= \frac{(b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_M - a_M)}{N_1 N_2 \dots N_M} \sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2} \dots \sum_{i_M=1}^{N_M} f(x_i) \\
 &= \frac{V^{(M)}}{N} \sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2} \dots \sum_{i_M=1}^{N_M} f(x_i)
 \end{aligned}$$

mit  $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{iM})$  als  $M$ -dimensionaler Vektor.

# Integration mit Zufallszahlen



**Abbildung:** Bestimmung der Fläche eines Viertelkreises durch Monte-Carlo (hit or miss)

**Auswertung nicht mehr in festen Abständen  $\Delta x$  sondern zufällig.**  
Ergebnis in 1D:

$$A = \frac{b-a}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i)$$

In M Dimensionen  
mit Zufallsvektoren  $x_i = (x_1, x_2, \dots, x_M)$ :

$$V^{(M+1)} = \frac{V^{(M)}}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i)$$

# Monte-Carlo in der Praxis

## Beispiel

### Volumen einer Kugel

$$f(x, y) = z = \sqrt{r^2 - (x^2 + y^2)}$$

- $M = 2$ -dimensionalen Kasten  $([-r, r], [-r, r])$  um die Kugel legen
- $N$  2-dimensionale Zufallsvektoren erzeugen
- Funktionswerte von Vektoren innerhalb der Kugel aufsummieren und mit  $\frac{\text{Kastenvolumen}}{N}$  normieren



# Monte-Carlo in der Praxis

```
#include <iostream>
#include <iomanip>
#include <math.h>

using namespace std;

int main () {

    srand(1548);                /* seed */

    int npoints=1000000;        /* Anzahl der
                                Zufallsvektoren N */

    float r=1.0;                /* Radius */

    float V=pow((2*r),2);       /* Volumen des Kastens
                                 $V=(2r)^2$  */

    float sq,x,y,res,sum=0;
```

## Monte-Carlo in der Praxis

```
for(int i=1;i<=npoints;i++)
{
    x=r*(2.0*rand()/RAND_MAX-1.0);
    y=r*(2.0*rand()/RAND_MAX-1.0);

    sq=x*x+y*y;

    if(sq < r*r)
    {
        sum+=sqrt(r*r-sq);
    }
}

res= V*sum/npoints;

cout << setprecision(10) << res << endl;
}
```

## Rechenzeit

Die Anzahl der benötigten Punkte fuer vergleichbare Ergebnisse wächst bei regulärer Integration mit  $N^D$ , mit MC allerdings nur mit  $N \cdot D$ .

| D | Normale Integration |          | MC      |          | Tatsaechlicher Wert |
|---|---------------------|----------|---------|----------|---------------------|
|   | Zeit[s]             | Ergebnis | Zeit[s] | Ergebnis |                     |
| 2 | 0.00                | 3.1524   | 0.01    | 3.1435   | 3.1415              |
| 5 | 0.02                | 5.2381   | 0.10    | 5.2787   | 5.2637              |
| 6 | 0.30                | 5.1451   | 0.13    | 5.1748   | 5.1677              |
| 7 | 5.02                | 4.6704   | 0.15    | 4.7098   | 4.7247              |
| 8 | 89.9                | 3.9595   | 0.17    | 4.0479   | 4.0587              |
| 9 | 1320                | 3.3998   | 0.20    | 3.3191   | 3.2985              |

**Tabelle:** Normale Integration (20 Intervalle pro Dimension) vs MC ( $10^5$  Zufallsvektoren)

# Monte-Carlo zur Phasenraumintegration

## **$2 \rightarrow N$ Wirkungsquerschnitte haben $(3N - 4)$ -dimensionale Integrale.**

Somit ist Monte-Carlo für  $N \geq 3$  im Hinblick auf Rechenzeit und Fehlerminimierung deutlich geeigneter als herkömmliche numerische Integrationsverfahren.

Durch die Wahl des Bereichs der Zufallszahlen sind cutoffs sehr angenehm setzbar.

# Monte-Carlo zur Phasenraumintegration

## Beispiel

$$p\bar{p} \rightarrow t\bar{t}, \sqrt{s} = 1,96\text{TeV}$$

$$\sigma_{(q\bar{q} \rightarrow t\bar{t})} = \frac{\alpha_s^2 \pi}{36} \frac{1}{s} \int_{-1}^1 d\cos\theta (1 + \cos^2\theta) = \frac{2\alpha_s^2 \pi}{27s}$$

Abschätzung in LO, nur Quarkannihilation (entspricht  $\sim 85\%$  des totalen WQ), PDF-Integration nur über  $u\bar{u}$  und  $d\bar{d}$ ...

$$\begin{aligned} \sigma_{(p\bar{p} \rightarrow t\bar{t})} &\approx \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \sum_{u,d} f_f(x_1) f_{\bar{f}}(x_2) \cdot \frac{2\alpha_s^2 \pi}{27s} \\ &\approx 2,61\text{pb} \end{aligned}$$